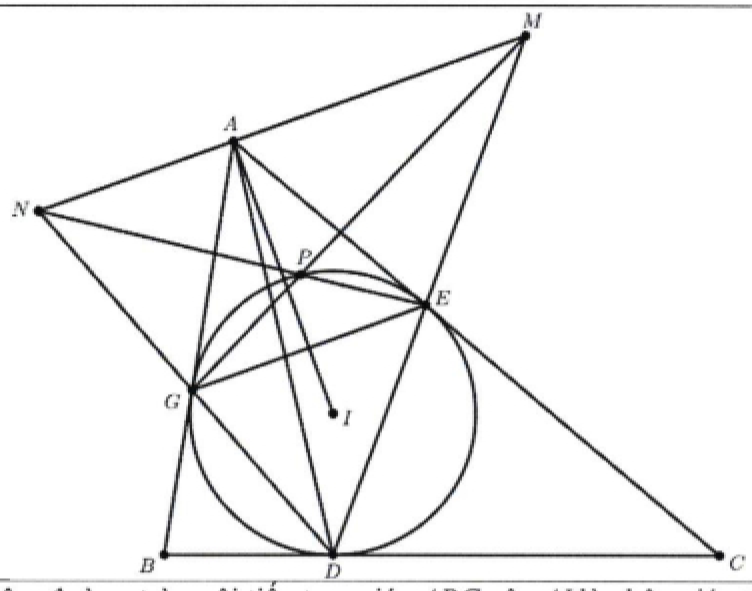
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI**	CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM **Độc lập- Tự do - Hạnh phúc**

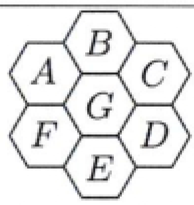
ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM NĂM 2023
Môn thi: TOÁN (CHUYÊN)

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (2,5 đ) 1a) (1,0 đ)	Gọi 4 số nguyên liên tiếp là a, $a+1$, $a+2$, $a+3$.	**0,25**
	Ta có: $P=a(a+1)(a+2)(a+3)+1=(a^2+3a)(a^2+3a+2)+1$. Đặt $t=a^2+3a+1\ (t\in\mathbb{Z})$.	**0,5**
	Suy ra: $P=(a^2+3a)(a^2+3a+2)+1=(t-1)(t+1)+1=t^2$. Vậy P là bình phương của một số nguyên.	**0,25**
1b) (1,5 đ)	Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2xy-x=10\\ x+y+xy=11\end{cases}$ (*) Từ (*) ta suy ra: $(2xy-x)-(x+y+xy)=10-11$ hay $xy-2x-y=-1$.	**0,25**
	Ta có: $xy-2x-y=-1\Leftrightarrow(x-1)(y-2)=1$ (**)	**0,25**
	Do x, y là số nguyên nên $(**)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=1\\ y-2=1\end{cases}\\ \begin{cases}x-1=-1\\ y-2=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}\end{array}\right.$.	**0,5**
	Thay cặp số $(x\,;y)=(2\,;3)$ vào hệ (*), ta thấy cặp số $(x\,;y)=(2\,;3)$ là nghiệm của hệ (*)	**0,25**
	Thay cặp số $(x\,;y)=(0\,;1)$ vào hệ (*), ta thấy cặp số $(x\,;y)=(0\,;1)$ không là nghiệm của hệ (*). Vậy hệ (*) có nghiệm nguyên duy nhất là $(x\,;y)=(2\,;3)$.	**0,25**
Câu 2 (3,0 đ) 2a) (1,5 đ)	Giả sử $a\neq c$. Suy ra $\sqrt{a+b-c}-\sqrt{b}\neq 0$. Ta thấy: $\sqrt{a}-\sqrt{a+b-c}=\sqrt{b}+\sqrt{c}\Leftrightarrow\sqrt{a}-\sqrt{c}=\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b}$ $\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}=\dfrac{\left(\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a+b-c}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a+b-c}-\sqrt{b}}$ $\Leftrightarrow\dfrac{a-c}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}=\dfrac{a-c}{\sqrt{a+b-c}-\sqrt{b}}\Leftrightarrow\sqrt{a}+\sqrt{c}=\sqrt{a+b-c}-\sqrt{b}$ $\Leftrightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\sqrt{a+b-c}$.	**0,5**
	Do c > 0 nên $\sqrt{a+b-c}<\sqrt{a+b+c}$.	**0,25**
	Do a, b là các số thực không âm, c là số thực dương nên $\sqrt{a+b+c}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$. Vì vậy, ta có: $\sqrt{a+b-c}<\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$. Ta nhận được mâu thuẫn.	**0,25**
	Vậy $a=c$. Suy ra $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{b}$ và $\sqrt[3]{a+b-c}=\sqrt[3]{b}$. Vậy $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{a+b-c}$.	**0,5**

2b) (1,5 đ)	Đặt $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}=r\in\mathbb{Q}$. Suy ra $r>0$ và $r\left(\sqrt{5}+\sqrt{b}\right)=\sqrt{3}+\sqrt{a}$	0,25
	$\Leftrightarrow r\sqrt{5}-\sqrt{3}=\sqrt{a}-r\sqrt{b}$. Bình phương hai vế ta có: $5r^2-2r\sqrt{15}+3=a-2r\sqrt{ab}+br^2$ $\Leftrightarrow 2r\left(\sqrt{ab}-\sqrt{15}\right)=a-3+(b-5)r^2 \Leftrightarrow \sqrt{ab}-\sqrt{15}=\dfrac{a-3+(b-5)r^2}{2r}$.	0,25
	Đặt $\dfrac{a-3+(b-5)r^2}{2r}=s\in\mathbb{Q}$. Ta có: $\sqrt{ab}-\sqrt{15}=s\Leftrightarrow\sqrt{ab}=s+\sqrt{15}$. Bình phương hai vế ta có: $ab=s^2+15+2s\sqrt{15}\Leftrightarrow ab-s^2-15=2s\sqrt{15}$.	0,25
	Vì $\sqrt{15}\notin\mathbb{Q}$ và $ab-s^2-15\in\mathbb{Q}$ nên $s=0$ và $ab-s^2-15=0$, tức là $s=0$ và $ab=15$. Suy ra $(a\,;\,b)=(1\,;\,15);(15\,;\,1);(3\,;\,5);(5\,;\,3)$.	0,25
	• Xét $(a\,;\,b)=(1\,;\,15)$: Ta có: $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{5}+\sqrt{15}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{1}{5}}\notin\mathbb{Q}$: Loại. • Xét $(a\,;\,b)=(15\,;\,1)$: Ta có: $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{\sqrt{5}+1}=\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$: Loại. • Xét $(a\,;\,b)=(3\,;\,5)$: Ta có: $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}\notin\mathbb{Q}$: Loại. • Xét $(a\,;\,b)=(5\,;\,3)$: Ta có: $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{5}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=1\in\mathbb{Q}$: Thỏa mãn.	0,5
Câu 3 (2,5 đ) 3a) (1,0 đ)		
	Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên AI là phân giác trong của góc BAC. Mà AM là phân giác ngoài của góc BAC nên $MN\perp AI$.	0,5
	Do AE, AG là hai tiếp tuyến của đường tròn (I) nên $EG\perp AI$. Vậy $EG\,//\,MN$.	0,5
3b) (1,5 đ)	Ta có: $\widehat{GDE}=\widehat{GEA}$ (góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến với dây cung cùng chắn một cung).	

P

	Mà $\widehat{GEA}=\widehat{EAM}$ (so le trong), suy ra $\widehat{GDE}=\widehat{EAM}$. Do đó tứ giác *AEDN* là nội tiếp. Vì thế $\widehat{NED}=\widehat{NAD}$.	**0,75**
	Chứng minh tương tự ta có tứ giác *AGDM* là nội tiếp. Suy ra $\widehat{MAD}=\widehat{MGD}$.	**0,5**
	Ta có: $\widehat{DEP}+\widehat{DGP}=\widehat{DEN}+\widehat{MGD}=\widehat{NAD}+\widehat{MAD}=180°$. Suy ra tứ giác *DEPG* là nội tiếp. Vậy điểm *P* nằm trên đường tròn (*I*).	**0,25**
Bài 4 **(1,0 đ)**	Nếu lục giác đều tô màu trắng ta đánh số + 1, nếu tô màu đen ta đánh số − 1.	**0,25**
		
	Ở mỗi trạng thái, ta xét tích *P* các số trong các lục giác đều *A*, *C*, *D*, *F*.	**0,25**
	Nhận xét: Mỗi lần thực hiện thuật toán chỉ có một số chẵn số trong tích *P* là bị đổi dấu. Vì thế, tích *P* không thay đổi qua mỗi lần thực hiện thuật toán.	**0,25**
	Ở trạng thái ban đầu (*Hình 1*), ta có *P* = 1. Trong khi đó với trạng thái ở *Hình 2*, ta có: *P* = − 1. Vậy ta không bao giờ có thể nhận được trạng thái ở *Hình 2*.	**0,25**
Bài 5 **(1,0 đ)**	Với mỗi số nguyên dương $n>1$, ta kí hiệu *S*(*n*) là tổng của tất cả các số nguyên tố nhỏ hơn *n*. Chẳng hạn, *S*(7) = 10, *S*(8) = 17, … Thế thì: $S(n)<1+2+...+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}<n(n-1)$ (*)	**0,25**
	Xét *p* là số nguyên tố tùy ý lớn hơn 10^{2023}. Gọi *q* là số nguyên tố nhỏ nhất sao cho $q>p$. Suy ra $S(q)=S(p)+p$. Giả sử *S*(*p*) không nguyên tố cùng nhau với *p* và *S*(*q*) không nguyên tố cùng nhau với *q*.	**0,25**
	Suy ra $S(p)\vdots p$; $S(q)\vdots q$. Đặt $S(p)=pk$ $(k\in\mathbb{N}^*)$. Từ (*) ta suy ra $k<p-1$. Mặt khác, ta có: $S(q)=S(p)+p=pk+p=p(k+1)\vdots q$. Do ƯCLN(p, q) = 1 nên $k+1\vdots q\Rightarrow k+1\geq q\Rightarrow k\geq q-1$. Nhưng ta lại có: $k<p-1<q-1$. Ta nhận được mâu thuẫn. Vậy *S*(*p*) nguyên tố cùng nhau với *p* hoặc *S*(*q*) nguyên tố cùng nhau với *q*.	**0,5**

--------------------------------Hết--------------------------------